文章编号:1000-5854(2021)01-0001-07

一类刻画喷雾模型两相流系统解的存在唯一性

陈昌飞，　蒋　鹏

(河海大学 理学院,江苏 南京　210098)

摘　要:讨论了由可压缩 Navier-Stokes 方程组与 Vlasov 方程耦合的一类薄的喷雾模型初边值问题光滑解的整体存在性.该模型刻画了在气体和其中悬浮的颗粒物(气溶胶)所组成的两相流系统中，空气与颗粒物自身的运动规律以及两者之间的相互作用.其中颗粒群中的颗粒运动是由气体动力以及颗粒之间相互碰撞的 2 种力所支配,该运动通过 Vlasov 方程来刻画,气体的运动则由可压缩 Navier-Stokes 方程组刻画.利用经典的能量估计方法，并结合颗粒运动的反射边界条件,求出该系统整体光滑解的存在唯一性.

关键词:喷雾；可压缩 Navier-Stokes 方程组；Vlasov 方程；初边值问题；整体光滑解

中图分类号:O 175.2　　**文献标志码**:A　　**doi**:10.13763/j.cnki.jhebnu.nse.202101001

Existence and Uniqueness of Solution for a Two-phase Flow System Describing Spray Model

CHEN Changfei,　JIANG Peng

(College of Science, Hohai University, Jiangsu Nanjing　210098, China)

Abstract: This paper mainly discusses the global existence of the smooth solution to the initial boundary value problem for a thin spray model coupled by the compressible Navier-Stokes equations and the Vlasov equation. The model describes the motion law and interaction between air and particulate matter in a two-phase flow system composed of gases and aerosols. The particle movement in the particle group is dominated by the force of gas and the force of collision between particles, which is described by the Vlasov equation, while the gas movement is described by the compressible Navier-Stokes equations. With the classical energy estimation method and the reflection boundary condition of the particle motion, the existence and uniqueness of the global smooth solution to the system is obtained.

Key words: sprays; compressible Navier-Stokes equations; Vlasov equation; initial-boundary value problem; global smooth solution

0　引　言

讨论了一类刻画气溶胶喷雾模型的两相流系统的整体适定性问题,该系统由可压缩 Navier-Stokes 方程组和 Vlasov 方程耦合得到,描述了气体与其中的颗粒(气溶胶)间的相互作用.气溶胶喷雾粒子是悬浮在大气中的多种固体和液体的微小颗粒.有的来源于自然界,如火山喷发的烟尘、被风吹起的土壤微粒、海水飞溅扬入大气后而被蒸发的盐粒以及细菌、微生物等[1-2];有的是由于人类活动产生,如煤、油及其他矿物燃料的燃烧物质,以及车辆产生的废气排放至空气中产生的大量烟粒等[3-4].对于这类两相流系统的研究在数学理论上已取得一些进展,该系统的具体形式为

收稿日期:2020-09-10；**修回日期**:2020-10-15

基金项目:江苏省自然科学基金(BK20191296)；中央高校业务费(2019B19114)

作者简介:陈昌飞(1995-),女,安徽安庆人,硕士研究生,研究方向为偏微分方程.

$$\left.\begin{aligned}&\rho t+\mathrm{div}_x(\rho u)=0,\\&(\rho u)_t+\mathrm{div}_x(\rho u\otimes u)+\nabla p=\lambda\Delta u+\int_{\mathbf{R}^3}(v-u)f\mathrm{d}\,v,\\&f_t+v\cdot\nabla xf=\mathrm{div}_v[(v-u)f],\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中:$\rho(x,t)>0,u(x,t)\in\mathbf{R}^3$ 分别表示流体的密度和速度场,x,t 分别表示空间和时间变量,$p(\rho)=\rho^\gamma,\gamma>1$ 表示压强,$\lambda>0$ 表示粘性系数,$f=f(x,t,v)\geqslant 0$ 表示粒子分布函数,v 表示粒子的运动速度. 对于系统(1),目前的研究成果主要集中于 2 个方面:一是大初值情形下整体弱解的存在性,如 Mellet 等[5-6] 得到了弱解的整体存在性和解的渐近分析,Wang[7] 和 Yu 等[8] 得到了相应的不可压系统整体弱解的存在性;另外一个是小初值情形下整体光滑解的存在性,如 Carrillo 等[9] 研究了无粘的两相流系统光滑解的整体存在性及解的衰减估计,有粘情况参见文献[10].

目前对大初值整体光滑解的研究结果还比较少,这主要是由于(1) 中阻力项$\int_{\mathbf{R}^3}(v-u)f\mathrm{d}\,v$ 的正则性较低[5,11],无法得到解的更高阶导数的一致先验估计,从而无法提高解的正则性. 本文中,笔者从一维情形入手,考虑一种简化模型:薄的喷雾(very thin sprays),并证明其初边值问题大初值整体光滑解的存在唯一性. 在该模型中颗粒分布较稀疏,对流体运动影响较小,可以近似忽略[12-13],其一维模型可具体表示为

$$\rho_t+(\rho u)_x=0,\tag{2}$$

$$(\rho u)_t+(\rho u^2+p)_x=\lambda u_{xx},\tag{3}$$

$$f_t+(fv)_x=[(v-u)f]_v.\tag{4}$$

在空间中的有界区域 $\Omega=(0,1)$ 上给出相应的初边值条件

$$\begin{aligned}&(\rho,u,f)\mid_{t=0}=(\rho_0(x),u_0(x),f_0(x,v)),x\in\Omega,v\in\mathbf{R},\\&u\mid_{x=0,1}=0,t\geqslant 0,\\&f(x,v,t)=f(x,-v,t),\begin{cases}x=0,v>0,\\x=1,v<0.\end{cases}\end{aligned}\tag{5}\tag{6}$$

其中,(6) 又被称为反射边界条件,反映了粒子与边界发生碰撞并产生镜面反射的情形[11].

本文的主要结论如下:

定理 1 假设(5)(6) 满足相容性条件,并且存在常数 $C_0>0,M_0>0$ 使得

$$C_0^{-1}\leqslant\rho_0(x)\leqslant C_0,\ \|\rho_0\|_{H^2(\Omega)}+\|u_0\|_{H^2(\Omega)}\leqslant M_0,0\leqslant f_0(x,v)\leqslant C,$$

$$\int_0^1\int_{\mathbf{R}^3}f_0\,\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant C,\int_0^1\int_{\mathbf{R}^3}(1+v^2)(f_{0,x}^2+f_{0,v}^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant M_0,$$

则问题(2) ~ (6) 存在光滑解(ρ,u,f) 使得 $\forall\,x,t\in\Omega_T:=\Omega\times(0,T)$,存在常数 $C>0$,有

$$0<C^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant C,0\leqslant f(x,v,t)\leqslant C,$$

$$\rho,u\in C^1(\Omega_T),u_{xx}\in C^0(\Omega_T),f\in C^1(\Omega_T\times\mathbf{R}),$$

其中,$T>0$ 为任意常数.

定理 1 的证明主要通过解的局部存在性并结合解的一致先验估计得到. 解的局部存在性通过标准的压缩映像原理得到,证明过程不再给出. 一致先验估计相较于标准的 Navier-Stokes 方程组,需要得到方程(4) 中 f 的各阶导数估计,其中如何控制右端的粒子-流体碰撞项$[(v-u)f]_v$ 是其中的难点. 本文中,笔者主要利用反射边界条件(6) 的特点并结合 Vlasov 方程的结构得到.

1 一致先验估计

为了证明光滑解的整体存在性,需要建立关于解(ρ,u,f) 一致先验估计,这将通过对方程的详细分析得到. 首先给出一些基本的能量估计.

引理 1 对任意的 $t\in(0,T)$,存在常数 $C>0$,使得

$$\int_0^1\rho(x,t)\mathrm{d}\,x=\int_0^1\rho_0(x)\mathrm{d}\,x,$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)\mathrm{d}\,x+\int_0^T\int_0^1u_x^2\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,t=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho_0u_0^2+\frac{\rho_0^\gamma}{\gamma-1}\right)\mathrm{d}\,x\leqslant C,$$

$$\int_0^1\int_{\mathbf{R}} f(x,v,t)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{\mathbf{R}} f_0(x,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x,$$

$$0 \leqslant f(x,v,t) \leqslant C,\ \forall (x,v,t) \in \Omega_T \times \mathbf{R}.$$

证　由边界条件(5)，从(2)中可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}x = 0.$$

对(3)两边乘 u，关于 x 积分，再利用分部积分公式及边界条件(5)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)\mathrm{d}x + \lambda\int_0^1 u_x^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

再对上两式关于 t 积分则证明了前面 2 个估计. 对(4)在 $\Omega\times\mathbf{R}$ 上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}} f\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x + \int_0^1\int_{\mathbf{R}}(fv)_x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{\mathbf{R}}[(v-u)f]_v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x,$$

由边界条件(6)可以推出

$$\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(fv)_x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{-\infty}^0(fv)_x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x + \int_0^1\int_0^{+\infty}(fv)_x\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{-\infty}^0 v(f(1,-v,t)-f(0,v,t))\,\mathrm{d}v + \int_0^{+\infty} v(f(1,v,t)-f(0,-v,t))\,\mathrm{d}v = 0,$$

由此可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}} f\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x = 0$. 最后，对(4)运用极值原理可得

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega_T\times\mathbf{R})} \leqslant C(T)\,\| f_0 \|_{L^\infty(\Omega\times\mathbf{R})} \leqslant C,$$

则引理 1 得证.

1.1　密度的上下界

引理 2　对任意的 $(x,t)\in\bar{\Omega}_T$，存在正常数 C，使得 $C^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant C$.

证　首先将(3)改写成

$$(\rho u)_t = (\lambda u_x - \rho u^2 - \rho^\gamma)_x.$$

定义

$$\varphi(x,t) = \int_0^t(\lambda u_x - \rho u^2 - \rho^\gamma)\,\mathrm{d}s + \int_0^x \rho_0 u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

由(2),(3)得 $\varphi_x = \rho u$，$\varphi_t = \lambda u_x - \rho u^2 - \rho^\gamma$，由引理 1，初边值条件(5)和柯西施瓦兹不等式，得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1 |\varphi_x|\,\mathrm{d}x \leqslant C,\ \sup_{t\in(0,T)}\left|\int_0^1\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant C.$$

由此可得 $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega_T)}\leqslant C$. 定义 $D_t := \partial_t + u\partial_x$ 和函数 $F=\exp(\varphi/\lambda)$，可得

$$D_t(\rho F) := \partial_t(\rho F) + u\partial_x(\rho F) = -\left|\frac{1}{\lambda}\rho^\gamma\right|\rho F \leqslant 0,$$

所以有 $\rho F\leqslant\rho_0 F_0$，则 $\rho\leqslant\frac{\rho_0 F_0}{F}\leqslant C$. 类似地，$D_t\left(\frac{1}{\rho F}\right)=\frac{1}{\rho F}\cdot\frac{\rho^\gamma}{\lambda}\leqslant C\frac{1}{\rho F}$. 利用 Gronwall 不等式可以得到 $\frac{1}{\rho F}\leqslant C\frac{1}{\rho_0 F_0}$，即 $\frac{1}{\rho}\leqslant C \Rightarrow \rho \geqslant C > 0$，引理 2 得证.

1.2　一阶导数估计

引理 3　对任意的 $t\in(0,T)$，存在正常数 C，使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1\rho_x^2\,\mathrm{d}x \leqslant C.$$

证　将(3)改写为

$$\left[\rho\left(\lambda\frac{\rho_x}{\rho^2}+u\right)\right]_t + \left[\rho u\left(\lambda\frac{\rho_x}{\rho^2}+u\right)\right]_x = -(\rho^\gamma)_x,$$

令 $\omega(x,t) := \left(\lambda\frac{\rho_x}{\rho^2}+u\right)(x,t)$，则上式记为

$$(\rho\omega)_t + (\rho u\omega)_x = -(\rho^\gamma)_x.$$

将上式两边同乘以 ω 并在 Ω 上积分，再利用 Young 不等式和 $|\rho_x|^2 \leqslant C(|\omega|^2+|u|^2)$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \rho\omega^2\mathrm{d}x = -\int_0^1 \gamma\rho^{\gamma-1}\rho_x\omega\mathrm{d}x \leqslant C\Big(\int_0^1\rho\omega^2\mathrm{d}x+\int_0^1\rho\rho_x^2\mathrm{d}x\Big)\leqslant$$
$$C\Big(\int_0^1\rho\omega^2\mathrm{d}x+\int_0^1\rho u^2\mathrm{d}x\Big)\leqslant C\Big(1+\int_0^1\rho\omega^2\mathrm{d}x\Big),$$

利用 Gronwall 不等式可证明引理 3.

引理 4 $\sup\limits_{t\in(0,T)}\int_0^T\int_0^1 u^2u_x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$

证 (3) 两边乘以 $4u^3$ 再对 x 积分，由 Young 不等式和引理 2 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho u^4\mathrm{d}x+12\int_0^1\lambda u^2u_x^2\mathrm{d}x = 12\int_0^1\rho^\gamma u^2u_x\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\varepsilon\int_0^1 u^2u_x^2\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_0^1\rho^{2\gamma}u^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_0^1u^2u_x^2\mathrm{d}x+C\Big(1+\int_0^1\rho u^4\mathrm{d}x\Big),$$

其中 ε 为充分小的正常数，利用 Gronwall 不等式可以证明引理 4.

引理 5 对任意的 $t\in(0,T)$，存在正常数 C，使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1(u_t^2+u_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C, \tag{7}$$
$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1\rho_t^2\mathrm{d}x\leqslant C.$$

证 首先将(3) 改写为

$$\rho^{1/2}u_t-\lambda\rho^{-1/2}u_{xx} = -\rho^{-1/2}(\rho uu_x+\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_x).$$

两边平方可得

$$\rho u_t^2+\lambda^2\rho^{-1}u_{xx}^2-2\lambda u_tu_{xx} = \rho^{-1}(\rho uu_x+\gamma\rho^{\gamma-1}\rho_x)^2,$$

再利用引理 3,4 可得

$$\lambda\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_0^1(\rho u_t^2+\lambda^2\rho^{-1}u_{xx}^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C+C\int_0^T\int_0^1(u^2u_x^2+\rho_x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C.$$

最后由(2),(7) 及引理 3，得

$$\int_0^1\rho_t^2\mathrm{d}x\leqslant\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^1\rho_x^2\mathrm{d}x+C\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x\leqslant C,$$

则引理 5 得证.

下面给出 f 的一阶导数估计，这里需要利用边界条件(6) 来处理.

引理 6 对任意的 $t\in(0,T)$，存在正常数 C，使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant C.$$

证 将(4) 关于 x 求导再乘以 f_x 并关于 x,v 求积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_x^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x=\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2}v(f_x^2)_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}[(v-u)f]_{xv}f_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x. \tag{8}$$

下面对(8) 右端各项做出估计. 首先利用边界条件(6) 可得

$$\begin{cases}f_t(0,v,t)=f_t(0,-v,t),\text{若 } v>0,\\ f_t(1,v,t)=f_t(1,-v,t),\text{若 } v<0,\end{cases}\text{和}\begin{cases}f_v(0,v,t)=-f_v(0,-v,t),\text{若 } v>0,\\ f_v(1,v,t)=-f_v(1,-v,t),\text{若 } v<0.\end{cases}$$

再利用相容性条件可推出

$$-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2}v(f_x^2)_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2v}[(f_t-[(v-u)f]_v)^2]_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x=$$
$$-\int_0^1\int_{-\infty}^0\frac{1}{2v}[(f_t-[(v-u)f]_v)^2]_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\int_0^1\int_0^{+\infty}\frac{1}{2v}[(f_t-[(v-u)f]_v)^2]_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x=$$
$$-\int_{-\infty}^0\frac{1}{2v}(f_t(1,-v,t)-f(1,-v,t)+vf_v(1,-v,t))^2\mathrm{d}v+$$
$$\int_{-\infty}^0\frac{1}{2v}(f_t(0,v,t)-f(0,v,t)-vf_v(0,v,t))^2\mathrm{d}v-$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2v}(f_t(1,v,t)-f(1,v,t)-vf_v(1,v,t))^2\mathrm{d}\,v+$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2v}(f_t(0,-v,t)-f(0,-v,t)+vf_v(0,-v,t))^2\mathrm{d}\,v=0. \tag{9}$$

其次,利用分部积分公式及 Young 和 Sobolev 不等式得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}[(v-u)f]_{xv}f_x\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x=-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x+vf_{xv}-u_xf_v-uf_{xv})f_x\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x=&\\ \int_0^1\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{1}{2}f_x^2-u_xf_xf_v\right)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant&\\ C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_x^2\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x+\|u_x\|_{L^\infty}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}|f_xf_v|\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant&\\ C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_x^2\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x+C\|u_{xx}\|_{L^2}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x.&\end{aligned} \tag{10}$$

类似地,对(4)关于 v 求导再乘以 f_v 并关于 x,v 求积分可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_v^2\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x=\int_0^1\int_{\mathbf{R}}[(v-u)f]_{vv}f_v\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_xf_v\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2}v(f_v^2)_x\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x=&\\ \int_0^1\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{3}{2}f_v^2-\frac{u}{2}(f_v^2)_v\right)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_xf_v\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant&\\ C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x+\|u\|_{L^\infty}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_v^2\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant&\\ C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x.&\end{aligned} \tag{11}$$

利用边界条件(6)和相容性条件,可推出 $-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2}v(f_v^2)_x\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x=0$. 最后,综合(8)~(11)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x\leqslant C(1+\|u_{xx}\|_{L^2})\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_x^2+f_v^2)\mathrm{d}\,v\mathrm{d}\,x,$$

利用 Gronwall 和 Young 不等式可证明引理 6 成立.

1.3　高阶导数估计

引理 7　对任意的 $t\in(0,T)$,存在正常数 C,使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1(u_t^2+u_{xx}^2)\mathrm{d}\,x+\int_0^T\int_0^1u_{xt}^2\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,t\leqslant C.$$

证　对(3)两边关于 t 求导,再同乘以 u_t,并关于 x 求积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_0^1\rho u_t^2\mathrm{d}\,x+\lambda\int_0^1u_{xt}^2\mathrm{d}\,x=-\int_0^1(\rho_tuu_xu_t+\rho u_t^2u_x+2\rho uu_tu_{xt}+(\rho^\gamma)_{xt}u_t)\mathrm{d}\,x.$$

下面利用 Young 不等式对右边各式逐项估计可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_0^1\rho u_t^2\mathrm{d}\,x+\lambda\int_0^1u_{xt}^2\mathrm{d}\,x\leqslant\varepsilon\int_0^1u_{xt}^2\mathrm{d}\,x+C(1+\|u_{xx}\|_{L^2})(1+\int_0^1\rho u_t^2\mathrm{d}\,x).$$

利用 Gronwall 不等式及引理 5 可得

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^1u_t^2\mathrm{d}\,x+\int_0^T\int_0^1u_{xt}^2\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,t\leqslant C. \tag{12}$$

再利用(3)可导出 $u_{xx}=\frac{1}{\lambda}(\rho u_t+\rho uu_x+(\rho^\gamma)_x)$,所以

$$\int_0^1u_{xx}^2\mathrm{d}\,x\leqslant C\int_0^1(\rho^2u_t^2+\rho^2u^2u_x^2+\rho^{2\gamma-2}\rho_x^2)\mathrm{d}\,x\leqslant C,$$

由此完成引理 7 的证明.

引理 8　对任意的 $t\in(0,T)$,存在正常数 C,使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1(\rho_{xx}^2+\rho_{xt}^2)\mathrm{d}\,x\leqslant C, \tag{13}$$

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1(u_{xt}^2+u_{xxx}^2)\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,t+\int_0^T\int_0^1u_{xxt}^2\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,t\leqslant C. \tag{14}$$

证 对(2)关于 x 求二次导并同乘以 ρ_{xx} 再关于 x 积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x=-\int_0^1(\rho_{xxx}\rho_{xx}u+3\rho_{xx}^2u_x+3\rho_{xx}\rho_xu_{xx}+\rho\rho_{xx}u_{xxx})\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\|u_x\|_{L^\infty}\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|\rho_x\|_{L^\infty}\|\rho_{xx}\|_{L^2}\|u_{xx}\|_{L^2}+C\|\rho_{xx}\|_{L^2}\|u_{xxx}\|_{L^2}\leqslant$$
$$C\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_{xxx}\|_{L^2}^2.$$

再由(3)可知，$u_{xxx}=\dfrac{1}{\lambda}(\rho_xu_t+\rho u_{xt}+\rho uu_{xx}+\rho_xuu_x+\rho u_x^2+(\rho^\gamma)_{xx})$，利用 Young 不等式得

$$\|u_{xxx}\|_{L^2}\leqslant\|\rho_x\|_{L^2}\|u_t\|_{L^\infty}+\|u_{xt}\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}\|u_{xx}\|_{L^2}+\|u\|_{L^\infty}\|u_x\|_{L^\infty}\|\rho_x\|_{L^2}+$$
$$\|u_x\|_{L^\infty}\|u_x\|_{L^2}+\|\rho_{xx}\|_{L^2}\leqslant C\|u_{xt}\|_{L^2}+C\|\rho_{xx}\|_{L^2}. \tag{15}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_{xt}\|_{L^2}^2.$$

利用引理 7 和 Gronwall 不等式可证明 $\sup\limits_{t\in(0,T)}\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x\leqslant C$. 再利用(2)可得

$$\int_0^1\rho_{xt}^2\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_{L^\infty}^2\int_0^1\rho_{xx}^2\mathrm{d}x+C\|u_x\|_{L^\infty}^2\int_0^1\rho_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1u_{xx}^2\mathrm{d}x\leqslant C,$$

则(13)得证. 对(3)两边关于 x,t 求导，再同乘以 u_{xt}，并关于 x 求积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho u_{xt}^2\mathrm{d}x+\lambda\int_0^1u_{xxt}^2\mathrm{d}x=-\int_0^1(\rho_tuu_x)_xu_{xt}\mathrm{d}x-\int_0^1(\rho u_tu_x)_xu_{xt}\mathrm{d}x-$$
$$2\int_0^1(\rho uu_{xt})_xu_{xt}\mathrm{d}x-\int_0^1(\rho^\gamma)_{xxt}u_{xt}\mathrm{d}x.$$

由引理 7 和(15)，利用 Young 不等式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho u_{xt}^2\mathrm{d}x+\lambda\int_0^1u_{xxt}^2\mathrm{d}x\leqslant C(1+\|u\|_{L^\infty}\|\rho_x\|_{L^\infty})\int_0^1\rho u_{xt}^2\mathrm{d}x+$$
$$C\|u_{xxx}\|_{L^2}(1+\int_0^1\rho u_{xt}^2\mathrm{d}x)+C(1+\int_0^1u_{xxt}^2\mathrm{d}x),$$

利用 Gronwall 不等式，得 $\sup\limits_{t\in(0,T)}\int_0^1u_{xt}^2+\int_0^T\int_0^1u_{xxt}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C$，再代入(15)则引理 8 得证.

引理 9 对任意的 $t\in(0,T)$，存在正常数 C，使得

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_t^2+f_{xt}^2+f_{vt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant C,$$
$$\sup_{t\in(0,T)}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xx}^2+f_{xv}^2+f_{vv}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant C.$$

证 对(4)关于 t 求导再同乘以 f_t 再关于 x,v 求积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{2}v(f_t^2)_x\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}[(v-u)f]_{vt}f_t\mathrm{d}v\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x-\int_0^1\int_{\mathbf{R}}u_tf_tf_v\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}u\left(\frac{1}{2}f_t^2\right)_v\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x+C\|u_t\|_{L^\infty}(\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x)^{1/2}(\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_v^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x)^{1/2}\leqslant$$
$$C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x+C\|u_{xt}\|_{L^2}^2(1+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x).$$

利用 Gronwall 不等式和引理 6 即可证明 $\sup\limits_{t\in(0,T)}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_t^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant C$.

对(4)分别关于 x 求二次导并乘以 f_{xx}，关于 v 求二次导并乘以 f_{vv}，关于 x,v 分别求导并乘以 f_{xv}，再关于 x,v 积分并将所得结果相加可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xx}^2+f_{xv}^2+f_{vv}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{1}{2}f_{xx}^2-u_{xx}f_vf_{xx}-2u_xf_{xx}f_{xv}+\frac{3}{2}f_{xv}^2-f_{xx}f_{xv}-u_xf_{xv}f_{vv}+\frac{5}{2}f_{vv}^2-2f_{xv}f_{vv}\right)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xx}^2+f_{xv}^2+f_{vv}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\|u_x\|_{L^\infty}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xx}^2+f_{xv}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x.$$

类似地，对(4) 分别关于 x,t 求导并乘以 f_{xt}，关于 v,t 求导并乘以 f_{vt}，再关于 x,v 积分得，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xt}^2+f_{vt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xt}^2+f_{vt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\|u_{xt}\|_{L^\infty}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_v^2+f_{xt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x+\|u_t\|_{L^\infty}\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{vv}^2+f_{vt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\left(1+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}(f_{xt}^2+f_{vt}^2)\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right)+C\|u_{xxt}\|_{L^2}\left(1+\int_0^1\int_{\mathbf{R}}f_{xt}^2\mathrm{d}v\mathrm{d}x\right).$$

由引理 8，对上 2 式利用 Gronwall 不等式则引理 9 得证.

由一致先验估计引理 1～9 并结合解的局部存在性，就完成了定理 1 的证明.

参考文献：

[1] BARANGER C, BOUDIN L, JABIN P, et al. A Modeling of Biospray for the Upper Airways[J]. Esaim-control Optimisation and Calculus of Vaviation Proc, 2005, 14: 41-47. doi: 10.1051/proc2005004

[2] BERRES S, BÜRGER R, TORY E M. Mathematical Model and Numerical Simulation of the Liquid Fluidization of Polydisperse Solid Particle Mixtures[J]. Comput Visual Sci, 2004(6): 67-74. doi: 10.1007/bf02663035

[3] WILLIAMS F A. Spray Combustion and Atomization[J]. Phys Fluid, 1958(1): 541-555. doi: 10.1063/1.1724379

[4] WILLIAMS F A. Combustion Theory[M]. 2nd ed. London: Benjamin Cummings Pbul, 1985. doi: 10.1016/0010-2180(59)90023-9

[5] MELLET A, VASSEUR A. Global Weak Solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes System of Equations[J]. Math Models Methods Appl Sci, 2007, 17: 1039-1063. doi: 10.1142/s0218202507002194

[6] MELLET A, VASSEUR A. Asymptotic Analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes System of Equations[J]. Comm Math Phys, 2008, 281: 573-596. doi: 10.1007/s00220-008-0523-4

[7] WANG D, YU C. Global Weak Solution to the Inhomogeneous Navier-Stokes-Vlasov Equations[J]. Differential Equations, 2015, 259(8): 3976-4008. doi: 10.1016/j.jde.2015.05.016

[8] YU C. Global Weak Solutions to the Incompressible Navier-Stokes-Vlasov Equations[J]. Math Pures Appl, 2013, 100(9): 275-293. doi: 10.1016/j.matpur.2013.01.001

[9] CARRILLO J A, DUAN R, MOUSSA A. Global Classical Solution Close to Equillibrium to the Vlasov-Euler-Fokker-Planck System[J]. Kinet Relat Models, 2011(4): 227-258. doi: 10.1007/s11425-005-0062-9

[10] LI F, MU Y, WANG D. Global Well-posedness and Large Time Behavior of Strong Soltion to a Kinetic-fluid Model[J]. SIAM Math Anal, 2017, 49(2): 984-1026. doi: 10.1137/15m1053049

[11] HAMDACHE K. Global Existence and Large Time Behaviour of Solutions for the Vlasov-Stokes Equations[J]. Indust Appl Math, 1998, 15(1): 51-74. doi: 10.1007/bf03167396

[12] DESVILLETTES L. Some New Results of Existence for the Theory of Sprays[C]. Workshop, Fluid-Kinetic Modeling in Biology, Physics and Engineering. Cambridge: The University of Cambridge Press, 2010.

[13] RICCI V. Derivation of Models for Thin Sprays from a Multiphase Boltzmann Model[C]. From Particle Systems to Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2017: 285-308.

（责任编辑　白占立）